

Modélisation et simulation en mathématiques

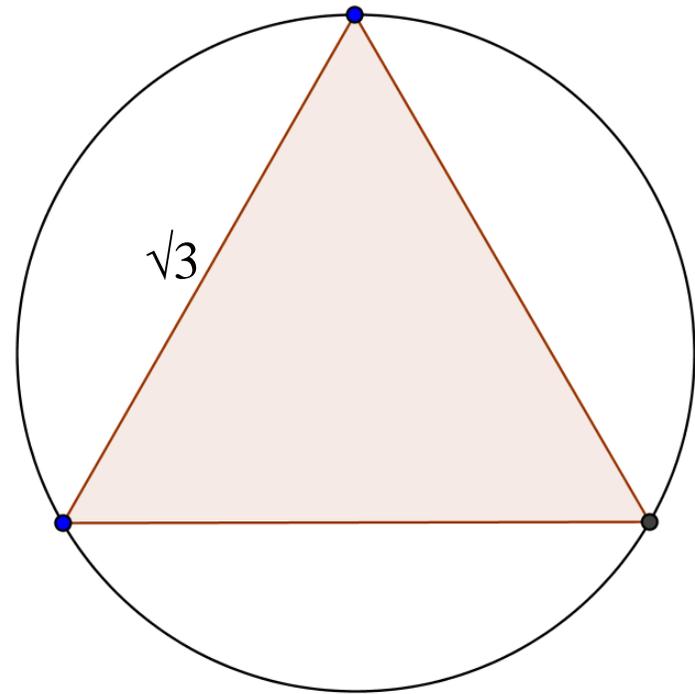
Atelier

Formation INRP
15 et 16 mai 2008

Problème à résoudre

Un cercle de rayon 1 étant donné, on choisit au hasard une corde du cercle.

Quelle est la probabilité que la longueur de la corde soit plus petite que la longueur du côté du triangle équilatéral inscrit ?

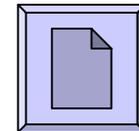


Imaginer un dispositif physique pour réaliser l'expérience et un algorithme pour la simuler

Choisir au hasard

Premier choix :

On fixe une des extrémités de la corde au point A. Toute corde est alors déterminée par la donnée de l'angle qu'elle forme avec la tangente en A au cercle.



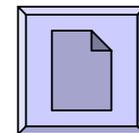
La probabilité :

$$120/180 = 2/3$$

Choisir au hasard

Deuxième choix :

On ne s'intéresse qu'aux cordes perpendiculaires à un diamètre donné du cercle. Toute corde est alors déterminée par la donnée d'un point sur ce diamètre.



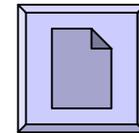
La probabilité :

$$\frac{AL + KA'}{AA'} = \frac{\frac{1}{4}AA' + \frac{1}{4}AA'}{AA'} = 1/2$$

Choisir au hasard

Troisième choix :

On choisit un point du disque au hasard que l'on considère comme milieu de la corde. Toute corde est ainsi déterminée comme elle est perpendiculaire au rayon du cercle passant par ce point.



La probabilité :

$$\frac{\text{Aire de la couronne}}{\text{Aire du disque}} = \frac{\frac{3}{4}\pi}{\pi} = 3/4$$

Choisir au hasard

Quatrième choix :

On s'intéresse à la longueur de la corde uniquement. La longueur d'une corde quelconque du cercle est comprise entre 0 et 2. La longueur du côté du triangle équilatéral est égale à $\sqrt{3}$.

La probabilité :

$$\frac{\text{Longueur de l'intervalle des succès}}{\text{Longueur de l'intervalle des possibles}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Simulations

Paradoxe de Bertrand

Problème mal posé – interprétations différentes de l'expression « choisir au hasard une corde dans un cercle »

Différents modèles, car *choix de conditions expérimentales différentes*

Choisir au hasard entre un nombre *infini* de cas – condition insuffisante. Comment va-t-on mesurer l'ensemble en question (difficulté à mesurer des ensembles infinis) ?

Modélisation et simulation en probabilité

Modéliser :

choisir les conditions de l'expérience aléatoire et lui ainsi
associer une loi de probabilité

Simuler :

produire des données à partir d'un modèle prédéfini
(simuler la loi du modèle)

Validation du modèle :

théorème « loi des grands nombres »